

Ejercicios de Análisis Matemático

Continuidad y límite funcional

1. Estudia la continuidad de la función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(1) = 1/4$ y:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x \in [0, 1[\cup]1, 2] \\ E(x) - 7/4 & \text{si } x \in]2, 4] \end{cases} \quad (E(x) \text{ es la parte entera de } x)$$

2. Sea $a > 1$. Prueba que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene al menos una solución positiva y otra negativa.
3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y verificando que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Prueba que hay algún $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 1 - c^2$.
4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \max f([a, b])$, $m = \min f([a, b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $[f(a), M[\cup]m, f(a)]$ en al menos dos puntos de $[a, b]$.
5. Calcula la imagen de la función $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$. Justifica, haciendo uso de las propiedades de la exponencial, que f es continua en \mathbb{R} , estrictamente decreciente en \mathbb{R}^- y estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ . Calcula la imagen de f .
7. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \neq 1$ por $f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x}$. Estudia la continuidad de f y los límites en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f .

Lecturas obligatorias. De mi libro “Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable”, que puedes descargar de mi página Web www.ugr.es/local/fjperez, las secciones 4.3 y 4.4 (sin demostraciones).

Lecturas optativas. La sección 5.3 del Capítulo 5 “Evolución del concepto de límite funcional”.